CONCOURS BLANC 2 ÉPREUVE 1 CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barème et exigences.

Exercice 1 : 67 points.

1. 2 points, 1 pour la continuité sur $]0,1[$ avec l'argument bien détaillé, 1 pour le calcul de limite et la continuité en 0.

2. 3 points, 1 pour considérer le taux d'accroissement, 1 pour l'équivalent de $\ln(1-x)$, 1 pour le calcul de la limite et la valeur de $f'(0)$.

3. 2 points, 1 pour un argument (rapide) qui justifie que f est $\mathcal{C}^1$, 1 pour le calcul de la dérivée.

4. **a.** 1 point, évident.

b. 2 points, bien détailler l'étude de signe.

5. 2 points, 1 pour la limite, 1 pour la conséquence graphique.

6. 3 points.

7. 3 points, 1 pour $\mathcal{C}^2$ (un argument rapide suffit), 1 pour le calcul de chaque dérivée.

8. 4 points, 1 pour le tableau de signe de g, 2 pour le théorème de la bijection et l'existence de β, 1 pour le tableau de signe de g'.

9. 4 points, 1 pour les variations de g, 1 pour le signe de $g(\beta)$, 1 pour le théorème de la bijection et l'existence de α, 1 pour sa position par rapport à β.

10. 3 points, 1 pour chacune des solutions, 1 pour le signe de $f(x)-x$.

11. 2 point, 1 pour annoncer le bon comportement de la suite dans ce cas (elle est constante), 1 pour le démontrer proprement par récurrence.

12. question un peu originale et intéressante.

a. 2 points pour calculer l'image de l'intervalle. On peut se contenter maintenant d'invoquer sans commentaire le théorème de la bijection.

b. 1 point, la seule difficulté consiste à citer le cours et à aller piocher les informations où il faut.

c. 2 points, question un peu difficile mais classique, il faut raisonner par l'absurde.

d. 1 point, il faut justifier que w_n sort de l'intervalle de définition de f à partir d'un moment.

e. 3 points pour un programme correct, quelques points pour les idées.

13. **a.** 2 points, 1 pour calculer l'image de l'intervalle $]0,\alpha[$ et conclure qu'il est stable, puis 1 point pour conclure. On peut aussi raisonner par récurrence.

Date: 3 Mars 2025 08h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

b. 4 points, 2 pour construire les arguments pour utiliser la limite monotone, 1 pour la valeur de la limite et la bonne utilisation du théorème du point fixe (1 point en moins s'il manque la continuité de f au bon endroit).

14. 2 points, c'est encore une fois le théorème de la bijection.

15. 1 point, il suffit de dire que $h(0)h(1) < 0$.

16. 2 points, 2 calculs simples.

17. **a.** 4 points, 1 par ligne.

b. 2 points, 1 pour la monotonie, 1 pour la limite.

18. 2 points, 1 pour le signe, 1 pour le sens de variations.

19. **a.** 1 point, il suffit de citer le théorème de la limite monotone.

b. 3 points, 1 pour $\lim_{n\to+\infty} n\ln(u_n)$, 1 pour $\lim_{n\to+\infty} u_n^n$ et 1 pour la contradiction avec la définition de la suite.

20. 2 points, 1 pour $f(u_n) = n$ et 1 pour exploiter correctement $u_n = f^{-1}(n)$.

Exercice 2 : 42 points.

1. **a.** 4 points, 1 pour non vide, 1 pour stable par combinaison linéaire, 0 si la définition n'est pas parfaitement connue. On peut aussi bien sûr (et c'est même mieux) l'écrire sous forme de Vect. Puis 1 pour la base (si ça n'est pas fait avant, il reste à dire que la famille génératrice est libre) et 1 pour la dimension.

b. 2 points, la réponse est non, il faut donner un contre-exemple. 0 si le "contre-exemple" n'est pas assez explicite.

2. 1 point.

3. **a.** 3 points, 2 pour le calcul de A^2 et 1 pour traduire le résultat sous forme de polynôme annulateur.

b. 5 points, 3 pour l'espace propre E_0 (vérifier que la famille obtenue après résolution du système est libre demande une vérification (sur 1 point), 2 pour l'espace propre E_a.

c. 2 points, 1 pour en déduire que A est diagonalisable et 1 pour la diagonaliser (c'est-à-dire écrire correctement P et D).

4. **a.** 3 points, 1 pour les deux valeurs propres, 2 pour les dimensions des espaces propres (1 pour citer le théorème du rang).

b. 5 points, encore une fois, il y a quelque chose à faire en plus pour E_0.

c. 3 points, 1 pour donner P et D, 1 pour justifier que P est inversible, c'est-à-dire que la famille de vecteurs propres obtenue est libre (concaténation...), 1 dernier point pour citer la formule de changement de bases.

5. **a.** 3 points, 2 pour la résolution du système, 1 pour la base du noyau.

b. 2 points, on détaille l'argument habituel.

c. 2 points, bien faire apparaître les calculs et la construction.

d. 2 points, on peut raisonner par équivalence.

e. 3 points, beaucoup de choses à faire mais c'est très classique, 1 pour les valeurs propres, 1 pour la recherche de chaque espace propre.

f. 2 points, 1 pour les valeurs propres, 1 pour la conclusion.

g. 2 points, question de conclusion basée sur la question **5.d**.

Exercice 3 : 45 points.

1. 3 points, 1 pour continue, 1 pour positive (1 point sur 2 si aucune explication n'est donnée), 1 pour le calcul intégral.
2. 2 points, 1 pour $]-\infty, 1[$, 1 pour $[1, +\infty[$. 0 point si calcul fait pour tout x et apparition soudaine de la distinction.
3. **a.** 7 points, 4 pour le cas $x > 1$ (1 pour $t < tx$, 1 pour $F(t)$, 1 pour $F(tx)$, 1 pour finir. 3 pour le cas $x < 1$ en justifiant (0 si le résultat n'est par argumenté). On ne sanctionne pas $\mathbb{P}([X > t]) \neq 0$ (c'est-à-dire l'existence de la proba conditionnelle), on ne sanctionne pas non plus si le cas $x = 1$ n'est pas fait à part.

   b. 2 point, 1 pour $t > 0$, 1 pour le résultat.
4. 1 point.
5. **a.** 2 points, 1 pour l'expression de la probabilité conditionnelle en fonction de G, 1 pour dire que cette proba conditionnelle est en fait $G(x)$.

   b. 3 points, 1 pour $\mathcal{C}^1$, 2 pour le calcul de $G'(x)$

   c. 4 points, 2 pour $\lim\limits_{x \to 1^+} G'(x) = c$, 1 pour la limite de $G'(tx)$ en 1^+ (1 sur 3 si $x = 1$ au lieu de $\lim\limits_{x \to 1^+}$, 1 pour finir en se souvenant que $c \neq 0$.
6. **a.** 3 points, 1 point en moins si les équivalences sont peu probantes.

   b. 1 point.

   c. 1 point.

   d. 2 points.

   e. 1 point.
7. **a.** 3 points, 1 pour écrire G sous la forme d'une solution, 1 pour se souvenir que $G(1) = 0$, 1 pour la continuité de G en 1.

   b. 2 points, 1 pour l'extension, 1 pour la loi de Y.
8. **a.** 2 points, dont 1 pour signaler que exp ou ln est une bijection strictement croissante.

   b. 3 points, 1 pour la bonne distinction de cas.

   c. 4 points, 2 pour `rd.exponential(1/c)` mais 1 si `rd.exponential(c)`, 2 pour `X=np.exp(Z)` mais 0 si `rd.exp(Z)`

Orthographe, présentation, lisibilité, esthétique générale : 7 points. Total : 163 points, divisés par 4.5 pour faire une note sur 20.

Erreurs fréquentes / Commentaires généraux.

- Les notes sont très écartées, une bonne partie de la classe a bien progressé, une autre n'a pas réussi ou pas voulu rentrer dans le programme.
- L'exercice 1 est le plus mal traité, c'est peut-être aussi le plus difficile, mais il faut sûrement concentrer une partie des révisions sur le programme de début d'année.
- La question "Montrer qu'une suite récurrente est bien définie" pose toujours autant problème.
- Une bonne moitié des copies continue à justifier qu'une fonction quotient de deux fonctions continues est continue.
- La méthode pour comprendre le sens de variation d'une suite implicite a été oubliée.
- Le programme de dichotomie aussi.
- Il est bizarre (mais correct) de dire que la matrice nulle est diagonalisable car elle est symétrique. On rappelle qu'une matrice diagonale est bien évidemment diagonalisable.

- Un programme qui calcule le rang de $B-\lambda I$ permet de justifier que λ est valeur propre mais la dimension de l'espace propre n'est pas égale au rang, elle est égale à la dimension du noyau, que l'on peut trouver grâce au théorème du rang.
- Des défauts de connaissance du cours sont visibles à la question "Montrer que f est une densité de probabilité".
- Et dans les méthodes de résolution d'une équation différentielle. On ne peut pas traiter de la même manière les équations à coefficients constants ou non.

Correction détaillée

Correction 1

Partie A : étude de la fonction f.

1. La fonction f est continue en chaque point de $]0,1[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour que f soit continue en 0, il faut vérifier que
$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$
Or $\lim_{x\to 0} \ln(1-x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ de sorte que le quotient $f(x)$ tend vers 0, qui est bien la valeur attribuée à $f(0)$.
2. On cherche la limite du taux d'accroissement,
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-1} = \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)}.$$
Or $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc le taux d'accroissement est équivalent à $\frac{-1}{\ln(x)}$, qui tend vers 0 lorsque $x\to 0$. On en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.
3. f est $\mathcal{C}^1$ en chaque point de $]0,1[$ comme quotient de fonctions $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas. On a
$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x}\ln(x) - \frac{1}{x}\ln(1-x)}{(\ln(x))^2} = \frac{\frac{-x\ln(x)-(x-1)\ln(x-1)}{x(x-1)}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x(x-1)(\ln x)^2}\left(-x\ln(x)-(1-x)\ln(1-x)\right)$$
4. **a.** Si $t\in\,]0,1[$, alors $\ln(t)<0$ et $t>0$ donc $t\ln(t)<0$.

   b. D'après ce qui précède, puisque $x\in\,]0,1[$ et $1-x\in\,]0,1[$, on sait que $x\ln(x)<0$ et que $(1-x)\ln(1-x)<0$. La fonction f' apparaît donc comme le quotient de deux fonctions positives. Puisque la dérivée est positive, la fonction f est croissante sur $]0,1[$.
5. On a $\lim_{x\to 1^-} = 0^-$ et $\lim_{x\to 1} \ln(1-x) = -\infty$. On en conclut que
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$$
La courbe de f admet une asymptote verticale (d'équation $x=1$) lorsque x tend vers 1.
6.

Partie B : résolution de l'équation $f(x)=x$.

1. La fonction ln est $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition donc la fonction g est $\mathcal{C}^2$ comme somme de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$. Puis
$$g'(x) = \frac{-1}{1-x} - \ln(x) - 1.$$
Et
$$g''(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x}.$$

2. On constate que $g''(x) < 0$ pour tout $x \in]0,1[$ donc g' est décroissante. On calcule aussi facilement les limites :
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1^-} g'(x) = -\infty.$$
Puisque g' est continue et décroissante, et compte tenu de limites en 0 et 1, on conclut d'après le théorème de la bijection que g' réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]-\infty,+\infty[$. Il existe donc un unique nombre $\beta \in]0,1[$ tel que $g'(\beta) = 0$.

3. Puisque ce nombre β est unique et puisque g' est continue, on en déduit que g' est de signe constant sur $]0,\beta]$ et sur $[\beta,1[$. Or
$$\lim_{x\to 0} g'(x) = +\infty$$
et on obtient donc que g' est positive sur $]0,\beta]$. Puis,
$$\lim_{x\to 1^-} g'(x) = -\infty$$
et on conclut que g' est négative sur $[\beta,1[$. Puis on en déduit que g est croissante sur $]0,\beta]$ et décroissante sur $[\beta,1[$. On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ et g est donc strictement croissante sur $]0,\beta]$ donc g est strictement positive sur $]0,\beta]$ et en particulier $g(\beta) > 0$.

On applique ensuite le théorème de la bijection sur l'intervalle $[\beta,1[$. Pour cela, on vérifie que

- g est continue sur $[\beta,1[$.
- g est décroissante sur $[\beta,1[$.
- $g(\beta) < 0$.
- $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\infty$.

La solution α est bien unique dans $]0,1[$ car l'équation $g(x) = 0$ n'a aucune solution dans $]0,\beta[$ (elle est strictement positive).

4. On a, pour tout $x \in]0,1[$,
$$f(x) - x = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - x = \frac{\ln(1-x) - x\ln(x)}{\ln(x)} = \frac{g(x)}{\ln(x)}$$
Ainsi sur $]0,1[$, $f(x) - x$ s'annule si et seulement si $g(x)$ s'annule. Ainsi, sur cet intervalle, l'équation $f(x) = x$ a une solution α.

On a aussi $f(0) = 0$ de sorte que 0 est aussi point fixe et on en trouve bien exactement 2 dans l'intervalle $[0,1[$.

Le signe de $f(x) - x$ est l'opposé de celui de g puisque $\ln(x) < 0$ sur $]0,1[$: f est donc négative sur $[0,\beta[$, puis positive sur $[\beta,1[$.

Partie C : étude d'une suite récurrente.

1. Les deux nombres 0 et α sont les points fixes de f. Ainsi si $w_0 = 0$, alors la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 et si $w_1 = \alpha$, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à α.

2. **a.** On montre en appliquant le théorème de la bijection que $f(]\alpha,1[) =]\alpha,+\infty[$: f est en effet continu et strictement croissante et les limites des deux intervalles se correspondent.

b. Puisque f est croissante, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est donné par le signe de $w_1 - w_0$. Or
$$w_1 - w_0 = f(w_0) - w_0 = \frac{g(w_0)}{\ln(w_0)}$$
Or, puisque $w_0 \geqslant \alpha$, que g est décroissante sur $[\beta,1[$ et que $g(\alpha) = 0$, on sait que $g(w_0) < 0$. D'autre part, $\ln(w_0) < 0$ donc le quotient $\frac{g(w_0)}{\ln(w_0)} > 0$ et la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. Puisque $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, elle est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$. Or f est continue donc si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est nécessairement vers un point fixe de f. Mais pour tout n, $w_n \geqslant w_0 > \alpha$ et les seuls points fixes de f sont 0 et α. Ainsi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

d. Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $w_n > 1$ à partir d'un certain rang. Or si $w_n > 1$, alors, on ne peut pas définir w_{n+1} car f n'est définie que sur $]0,1[$.

e. On peut écrire par exemple

```
import numpy as np

def f(x) :
  return (np.log(1-x))/(np.log(x))


n=0
w = w0
while ( w < 1 ) :
  w=f(w)
  n=n+1

print(n)
```

3. a. Cette fois, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car l'intervalle $]0,\alpha[$ est stable par f (le théorème de la bijection s'applique bien : f est croissante et continue).

b. Puisque f est croissante, on sait que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et son sens de variation est donné par le signe de $w_1 - w_0$. Or

$$w_1 - w_0 = \frac{g(w_0)}{\ln(w_0)} < 0$$

dans ce cas. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f et puisque, pour tout n, $u_n \leqslant u_0 < \alpha$, ce point fixe ne peut pas être α, c'est donc 0 et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Partie D : étude d'une suite implicite.

1. La fonction h_n est dérivable et $h_n'(x) = nx^{n-1} + 1$. On voit que $h_n'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs $h_n(0) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$. Puisque h_n est dérivable, elle est aussi continue et le théorème de la bijection s'applique : l'équation $h_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.
2. On applique le même théorème de la bijection à la même fonction (donc toujours continue et strictement croissante), mais cette fois à l'intervalle $]0,1[$: pour cela, il suffit de constater que $h_n(0) = -1 < 0$ et $h_n(1) = 1^n + 1 - 1 = 1 > 0$.
3. Pour u_1, il s'agit de résoudre l'équation
$$(E_1) : x + x - 1 = 0$$
qui a pour solution $\frac{1}{2}$. Pour u_2, il faut résoudre
$$(E_2) : x^2 + x - 1 = 0$$
qui a deux solutions $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, mais seule la dernière est positive. On obtient donc $u_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
4. **a.**

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def valeur_approchee(n) :
    a=0
    b=1
    while (b-a)>= 10**(-3) :
        c=(a+b)/2
```

```
        if (c**n + c -1) > 0 :
            b = c
        else :
            a = c
    return a
```

b. On demande à Python de calculer les 50 premiers termes de la suite grâce à la fonction précédente, puis de les représenter dans un graphique.

5. Soit $x \in]0,1[$. On a

$$h_{n+1}(x) - h_n(x) = x^{n+1} + x - 1 - (x^n + x - 1) = x^{n+1} - x^n = x^n(x-1)$$

et, puisque $x < 1$, on constate que $h_{n+1}(x) - h_n(x) < 0$.

Appliquant cette relation à u_n, on obtient que $h_{n+1}(u_n) < 0$, c'est-à-dire que $h_{n+1}(u_n) < h_{n+1}(u_{n+1})$ et puisque h_{n+1} est croissante, c'est donc que $u_{n+1} > u_n$.

6. **a.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée donc converge par le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite. Puisque tous les termes de la suite sont dans $[0,1]$, $\ell \in [0,1]$.

b. La suite $(\ln(u_n))_n$ converge vers $\ln(\ell) \neq 0$ donc $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ell)$, puis par produit d'équivalent $n\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\ln(\ell)$. Or $\ln(\ell) < 0$ donc $n\ln(u_n)$ tend vers $-\infty$.

D'autre part, on a $u_n^n = 1 - u_n$ et en passant au logarithme, on a

$$n\ln(u_n) = \ln(1-u_n).$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1-u_n) = \ln(1-\ell) \neq -\infty$ car $\ell < 1$.

C'est une contradiction : c'est donc que $\ell \notin [0,1[$ donc que $\ell = 1$.

7. On a

$$f(u_n) = \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)} = n.$$

Puisque f est strictement croissante, appelons f^{-1} la bijection strictement croissante. La fonction f^{-1} est définie sur $[0,+\infty[$, est une bijection strictement croissante et $f\left([0,+\infty[\right) = [0,1[$. Par ailleurs, de la relation précédente, on tire

$$u_n = f^{-1}(n).$$

Puisque $n \to +\infty$, on a $f^{-1}(n)$ qui converge vers 1 et on retrouve le résultat de la question **6.**

Correction 2

Cet exercice est tiré de **EML** 2020 Exercice 3.

Correction 3

Cet exercice est le problème de l'**EDHEC** 2023.